100

CONCOURS SPECIAL T' 1983

ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

DURÉE : 2 heures

Une fonction numérique f est connue pour 6 valeurs équidistantes de la variable x. On pourra toujours se ramener au cas où ces 6 valeurs sont : 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 .

x_i	0	1	2	3	4	5
$f_i = f(x_i)$	0,054	0,882	1,773	2,980	4,804	7,680

On approche la fonction f par la fonction g telle que :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{3} g_k \, e^{a_k x} .$$

On pose $y_k = e^{a_k}$.

① Écrire six relations liant g_1 , g_2 , g_3 , f_0 , f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5 et y_1 , y_2 , y_3 et exprimant : $\forall\, i \in [0 , 5]$ $g(x_i) = f_i$.

② Les nombres y_1 , y_2 , y_3 sont racines de l'équation :

(1) $$y^3 - c_1 y^2 - c_2 y - c_3 = 0$$

A l'aide de combinaisons linéaires des 6 relations précédentes, écrire un système (S) de 3 équations linéaires aux inconnues c_1 , c_2 , c_3 .

③ *Résolution de* (S) *par la méthode de Gauss.*

a. Écrire un système (S') équivalent à (S) dans lequel la 2e et la 3e équation ne comportent plus c_1 .

b. Écrire un système (S") équivalent à (S') dans lequel la 3e équation ne comporte plus c_2 . On écrira les coefficients de (S') et de (S") avec 7 décimales.

c. Calculer les valeurs c_1 , c_2 , c_3 avec 7 décimales.

④ *Résolution de l'équation* (1).

L'équation :

(2) $$u^3 + pu + q = 0$$

se résout, lorsque $4p^3 + 27q^2 < 0$, par les formules suivantes :

$$u_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\frac{\theta}{3}; \qquad u_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3} + 120\right); \qquad u_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3} - 120\right)$$

où $\theta = \text{Arc cos}\left(\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right)$, θ exprimé en degrés.

a. Ramener l'équation (1) à la forme (2) par le changement de variable : $y = u + \frac{c_1}{3}$;

b. Calculer les racines de l'équation (2) ainsi obtenue.

c. Donner les valeurs y_1 , y_2 , y_3 des racines de (1) , et les valeurs a_1 , a_2 , a_3 en ne conservant que 5 décimales.

⑤ Calculer g_1 , g_2 , g_3 en résolvant un système de 3 équations linéaires par la méthode de Gauss : on ne conservera que 5 décimales dans le résultat final.

⑥ Calculer une valeur approchée de $f(6)$.

FIN